I - Étude d'un filtre

1) Loi des mailles, que l'on dérive puisque l'on doit faire apparaître la dérivée de la tension d'entrée.

$$u_e = \alpha R i + L\frac{di}{dt} + u_s \quad \Rightarrow \quad \frac{du_e}{dt} = \alpha R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{du_s}{dt}$$

Loi des nœuds + relations des dipôles :

$$i = i_R + i_L \qquad u_s = R\, i_R \qquad u_s = \alpha L\frac{di_L}{dt}$$

On en déduit :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\alpha L}\, u_s$$

On injecte cette expression dans la loi des mailles :

$$\frac{du_e}{dt} = \alpha R\left(\frac{1}{R}\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\alpha L}\, u_s\right) + L\left(\frac{1}{R}\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{1}{\alpha L}\frac{du_s}{dt}\right) + \frac{du_s}{dt}$$

On multiplie par $\frac{R}{L}$ et on trouve :

$$\boxed{\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{R}{L}\left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{du_s}{dt} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 u_s(t) = \frac{R}{L}\frac{du_e}{dt}}$$

2) On a :

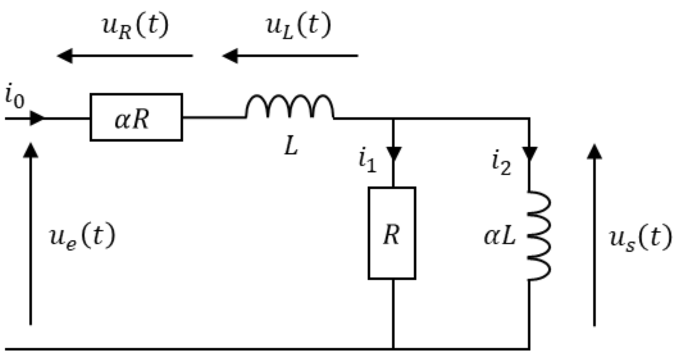
$$[u_s] = [u_e] = \text{Tension} \qquad \left[\frac{L}{R}\right] = [t] = \text{Temps} \qquad [\alpha] = 1$$

Chacun des quatre termes est homogène à une tension divisée par un temps au carré. L'expression est bien homogène.

3) On a :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}\left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{1}{1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}}}$$

4) Notations :



En $t = 0^-$:

- Bobines équivalentes à des fils. Donc : $u_L(0^-) = u_s(0^-) = 0$
- Loi d'Ohm : $i_1(0^-) = 0$
- Loi des mailles : $0 = u_R + u_L + u_s \quad \Rightarrow \quad u_R(0^-) = 0$
- Lois d'Ohm + loi des nœuds : $i_0(0^-) = i_2(0^-) = 0$

En $t = 0^+$:

- Continuité des intensités à travers les bobines : $\boxed{i_0(0^+) = i_2(0^+) = 0}$
- Loi des nœuds : $\boxed{i_1(0^+) = 0}$
- Lois d'Ohm : $\boxed{u_R(0^+) = u_s(0^+) = 0}$
- Loi des mailles : $\boxed{u_L(0^+) = E}$

5) On a :

$$\frac{du_s}{dt} = R\frac{di_1}{dt} = R\left(\frac{di_0}{dt} - \frac{di_2}{dt}\right) = R\left(\frac{u_L}{L} - \frac{u_s}{\alpha L}\right)$$

On applique cette formule en $t = 0^+$. Avec la question précédente, on trouve bien : $\boxed{\dot{u}_s(0^+) = \frac{RE}{L}}$.

6) Notons : $f(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}$. Ainsi : $Q = \frac{1}{f(\alpha)}$. On a : $f'(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha^2}$. Ainsi :

	0		**1**		**2**
$\boldsymbol{f'(\alpha)}$		⊖		⊕	
$\boldsymbol{f(\alpha)}$	$+\infty$	↘	3	↗	3,5
$\boldsymbol{Q(\alpha)}$	0^+	↗	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{2}{7}$

Donc :

$$\boxed{Q \in [0\,;1/3]}$$

7) Le temps du régime transitoire est minimal au régime critique. Or, on est en régime apériodique puisque $Q < 1/2$. Il faut donc se placer le plus proche possible du régime critique, ie. le plus grand facteur de qualité Q possible. On en déduit :

$$\boxed{\alpha_m = 1}$$

8) En régime apériodique, la forme générale de la solution est (la solution particulière est nulle car $u_e(t > 0) = cte$ donc : $\dot{u}_e(\mathrm{t} > 0) = 0$) :

$$\boxed{u_s(t) = e^{-\lambda t}\,(A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t))}$$

Avec les CI :

$$u_s(0^+) = \boxed{A = 0}$$

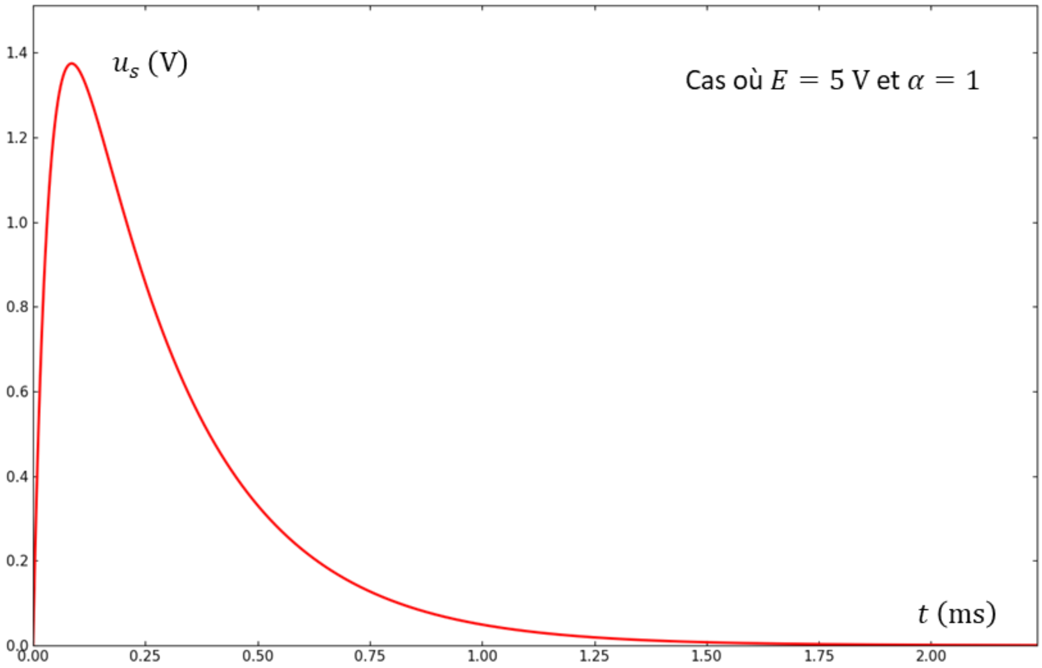
$$\dot{u}_s(0^+) = -\lambda A + B\Omega = \frac{RE}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{RE}{\Omega L}}$$

On en déduit :

$$\boxed{u_s(t) = \frac{RE}{\Omega L}e^{-\lambda t}\ \mathrm{sh}(\Omega t)}$$

9) Pour le tracé, faire attention à :

- La fonction est nulle en 0^+
- La dérivée est positive en 0^+
- Aucune oscillation : la courbe ne traverse pas l'axe des abscisses.



--- Fin de la partie I ---